**Оглавление**

[**Постановка математической задачи** 3](#_Toc208864826)

[**Метод экстраполяции Ричардсона**. 4](#_Toc208864827)

[**Grep** 8](#_Toc208864828)

[**Реализация алгоритмов** 11](#_Toc208864829)

[**Экстраполяция Ричардсона. Дополнительно об аппроксимации.** 13](#_Toc208864830)

[**Заключение** 16](#_Toc208864831)

[**Список литературы** 16](#_Toc208864832)

**Введение**

Метод экстраполяции Ричардсона, разработанный Льюисом Фраем Ричардсоном в начале XX века, представляет собой фундаментальный аппарат повышения точности численных вычислений и ускорения сходимости последовательностей в вычислительной математике.Основная цель метода заключается в эффективном оценивании предела последовательности или значения суммы ряда, когда исходная последовательность частичных сумм или приближений сходится медленно.

Пусть задана последовательность A(h), зависящая от параметра h, такая что:

где A — искомый предел, — неизвестные коэффициенты, — известные показатели скорости убывания погрешности, причём . Метод Ричардсона позволяет последовательно исключать члены погрешности, начиная с младших степеней h, путём комбинации вычислений при различных значениях параметра.

Основная идея метода заключается в построении новой последовательности такой, что:

где c=, — параметр измельчения. Нетрудно показать, что:

то есть погрешность новой последовательности имеет более высокий порядок малости. Процесс может быть продолжен рекуррентно для исключения последующих членов погрешности.

Важным преимуществом метода является его общность и простота реализации, однако он требует априорного знания показателей . Метод находит применение в численном дифференцировании и интегрировании, решении дифференциальных уравнений и других задачах вычислительной математики [2].

**Постановка математической задачи**

Дано: медленно сходящаяся последовательность , где – частичные суммы ряда

Условие сходимости: Последовательность сходится к пределу (т.е. ), но скорость сходимости низкая. Предполагается, что погрешность допускает разложение по степеням.

Цель: Построение на основе исходной последовательности новой последовательности, сходящейся к S существенно быстрее, путем последовательного исключения старших членов асимптотического разложения погрешности с помощью экстраполяции Ричардсона.

**Метод экстраполяции Ричардсона**.

Во многих проблемах бесконечную последовательность *{Sn}* можно соотнести с функцией *A(y)*. Она определена для *y⊂* (0,*b] (b>0)*, и *y* может быть как дискретным, так и непрерывным параметром.

После чего справедливо отношение *An = A(yn) (n*⊂ *0)* для некоторой монотонно убывающей последовательности *{yn*}⊂(0,*b]*, которая удовлетворяет

Тогда задача нахождения предела последовательности становится эквивалентной задаче нахождения предела функции:

Рассматривать функцию намного удобней, в отличие от последовательностей, так как существует обширный математический аппарат, который может помочь нам при анализе поведения функции.

В частности, во многих случаях функция *A(y)* может иметь хорошо определённое асимптотическое разложение при *y*→0+.

Предположим, что функция *A(y)* допускает при асимптотическое разложение следующего вида:.

В нашем случае пусть A(y) удовлетворяет равенству для некоторого *s*⊂ ℕ0,

где:

- неизвестные коэффициенты, не зависящие от *y*

- известная последовательность комплексных чисел такая, что:

Если данное равенство справедливо для любого s⊂ и *Re* σ*1*<Re σ*2*<… так, что:

Тогда у А(y) есть асимптотическое разложение:

Замечание: Ряд в правой части может расходиться; важна лишь асимптотическая природа разложения. Так как σ*k* нам известны, α*k* нам неизвестны, и, в общем случае, они нам не нужны.

Из разложения (4) следует, что:

Для получения более качественной аппроксимации к S нужно избавиться от с помощью метода экстраполяции Ричардсона..

Возьмем константу ω⊂*(0,1)* и *y*’=ω*y*.

Тогда из разложения (4) получаем:

Домножим на :

Вычитая (10) из (9), получаем:, получим:

Поделим на :

Пусть:

Тогда мы получаем новую аппроксимацию:

Причем:

Так как , то полученная аппроксимация будет лучше приближать S.

Так можно продолжать много и много раз, получаю аппроксимации вида:

где:

При каждой итерации строится новая аппроксимация, которая приближает S все лучше и лучше. Для экстраполяции Ричардсона существует рекурсивный алгоритм, который выводится из равенства (12) через индукцию.

Пусть Очевидно, что {ym}- убывающая последовательность, стремящаяся к нулю.

Алгоритм:

1. Положим
2. Пусть сn=, тогда:

Из рекуррентного алгоритма видно, что организуют некую структуру, которую можно организовать в виде таблицы:

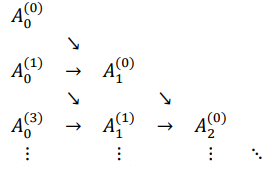


Рисунок 1 – Схема Ромберга

Схема, представленная выше называется таблицей Ромберга [1]. Стрелки означают поток вычислений. Стрелки указывают направление вычислений. Диагональные элементы ​ часто дают наилучшее приближение к пределу S.

**Grep**

Несмотря на эффективность экстраполяции Ричардсона, область её применения ограничена необходимостью точного знания показателей степеней σₖ в асимптотическом разложении и его специфической структурой. Для преодоления этих ограничений был разработан обобщенный метод экстраполяции GREP (Generalized Richardson Extrapolation Process) [3], применимый к более широкому классу последовательностей.

Пусть A(y) представима в виде суммы асимптотических разложений:

где - гладкие функции, обладающие известной асимптотической структурой. В отличие от метода Ричардсона, где неизвестные коэффициенты нужно было исключать, здесь используются именно функции которые могут иметь разные темпы роста.

Возьмём убывающую положительную последовательность такую, что .

Пусть .

Тогда аппроксимации к пределу А определены через систему линейных уравнений:

Где:

* – вспомогательные неизвестных N коэффициентов
* – фиксированные показатели

Видно, что формула получена из определения расширения функции, принадлежащей классу , заменой на асимптотическое расширение, которые мы отрезаем по .

Данное обобщение экстраполяционного процесса Ричардсона, которое генерирует , называется GREP(m).

GREP имеет несколько преимуществ перед экстраполяцией Ричардсона:

1. Вместо неизвестных констант теперь неизвестные гладкие функции , которые обладают асимптотическим расширением, форму которого мы знаем
2. Введены функции , которые не должны обладать какой-то определённой структурой и потому могут иметь различные темпы роста.
3. Функция A(y) представлена суммой асимптотических расширений.

Благодаря этому GREP имеет несколько преимуществ:

1. Более широкий класс функций, к которым может быть применён метод.
2. Так как в формуле присутствует конечное число функций , а функции , в сущности, представляют из себя полиномы, то это позволяет придумать алгоритмы, которые будут эффективными.
3. не являются уникальными, а потому они могут быть заменены другими функциями, имеющими расширение той же формы.

GREP также можно расширить на последовательности, у которых асимптотическое расширение функций имеет вид:

Где и они известны, также

Это асимптотическое расширение можно записать в общей форме:

Где функции образуют асимптотическую последовательность, т.е. .

Тогда расширение GREP примет вид:

Нетрудно заметить, что экстраполяционный метод Ричардсона есть ни что иное как расширение GREP(1):

Возьмем и , получим экстраполяционный метод Ричардсона:

**Реализация алгоритмов**

|  |
| --- |
| Функция Richardson\_Transform(ряд, n, order):  Вход:  ряд - исходный ряд, для которого ускоряется сходимость  n - количество членов частичной суммы  order - порядок преобразования (не используется в текущей реализации)    Выход:  Ускоренная частичная сумма после преобразования Ричардсона  Если n < 0:  Вызвать ошибку "отрицательное число на входе"    Если n == 0:  Вернуть DEF\_UNDEFINED\_SUM (по умолчанию 0)  Создать таблицу e размером 2 x (n + 1), инициализированную нулями  Заполнить первую строку таблицы e[0] частичными суммами ряда:  Для i от 0 до n:  e[0][i] = S\_n(i) // S\_n(i) - частичная сумма ряда до i-го члена  Инициализировать a = 1  Для l от 1 до n:  a = a \* 4  b = a - 1  Для m от l до n:  // Вычисление преобразования Ричардсона  e[1][m] = (a \* e[0][m] - e[0][m - 1]) / b    Поменять местами e[0] и e[1]  Определить результат:  Если n четное:  res = e[0][n]  Иначе:  res = e[1][n]  Если res не является конечным числом:  Вызвать ошибку "деление на ноль"  Вернуть res |

**Рисунок 1** – Псевдокод экстраполяции Ричардсон

**Вход**: , n = 4

**Выход**: При n=4 обычная сумма: 0.5833

После преобразования Ричардсона: 0.9444 (ближе к ln(2))

**Рисунок 2** – Пример применения экстраполяции Ричардсон

Функция GREP\_Transform(ряд A(y), N, m):

Вход:

A(y) – исходная функция или последовательность

N – число членов для аппроксимации

m – порядок метода GREP

Выход:

A\_approx – улучшенная аппроксимация предела

Задать последовательность {}, где → 0 при l → ∞.

Составить систему уравнений:

Решить полученную систему линейных уравнений относительно коэффициентов .

Подставить найденные коэффициенты в формулу и вычислить аппроксимацию .

Вернуть A\_approx = .

**Рисунок 3** – Псевдокод GREP

**Вход**: , при y → 0

{y\_l} = {0.5, 0.25, 0.125}, m = 1

**Выход**: Полученное значение: A^(1,1) ≈ 0

Истинное значение предела: A = 0 (при y→0 ряд сходится к 0)

**Рисунок 4** – Пример применения GREP

**Экстраполяция Ричардсона. Дополнительно об аппроксимации.**

Экстраполяцию Ричардсона можно рассматривать как общий метод повышения точности приближений, когда известна структура погрешности. Для улучшения аппроксимации, нам потребуется более глубокое понимание структуры погрешности. Поэтому начнём с разложений Тейлора для f(x ± h) вокруг точки x:

Отсюда получаем (более подробно об этом разложении пишет А. Самарский [2]):

Перепишем формулу (25) другом виде:

Где D – аппроксимация, а (величина, которую мы хотим аппроксимировать).

Выразим D:

При таком выражении D погрешность равна:

где еi обозначает коэффициент при hi в формуле (25), также отметим независимость коэффициентов от h. Мы предполагаем, что в общем случае ei≠0. Таким образом, мы получили аппроксимацию, основанную на значениях f(x) в точках x±h. Чтобы улучшить её, нам необходимо исключить e2h2 из погрешности. Реализовать это можно путем записи аппроксимации, основанной на значениях функции в других точках. Например:

Основная идея состоит в комбинации выражений (29) и (26) для исключения h2. Заметим, что после вычислений в формуле (29) коэффициент при h2 будет равен 4e2. Для получения аналогичного коэффициента в формуле (26) необходимо умножить обе части выражения на 4.

Вычтем выражения друг из друга и получим:

Таким образом нам удалось повысить точность аппроксимации за счет использования большего числа точек. Этот алгоритм можно продолжать и дальше, каждый раз убирая некоторые слагаемые и, тем самым, увеличивая точность вычисления.

Стоит отметить, что в формуле (29) можно использовать другие точки, к примеру h/2. Благодаря этому можно будет получать аппроксимации, основанные на других точках по схеме, описанной выше. Аналогичное описание алгоритма приведено в статье Дорона Леви [3] (p. 88)

**Заключение**

Метод Ричардсона позволяет повышать точность приближённых вычислений при наличии информации о степенях погрешности, однако его область применения ограничена. GREP устраняет этот недостаток и применим к более широкому классу последовательностей благодаря учёту функций, чьи свойства при малых *y* заранее определены. Оба метода находят применение в численном интегрировании, дифференцировании и при решении дифференциальных уравнений.

**Список литературы**

1. Лукьяненко М. В. Численные методы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://teach-in.ru/> (дата обращения: 11.04.2025).
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие. – Москва: Наука, 1989. – 432 с.
3. Levy D. Introduction to Numerical Analysis. – Providence: American Mathematical Society, 2012. – P. 88–98.
4. Бахвалов Н. С. Численные методы: учебное пособие. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 632 с.